

■ 自然数 n は $n \geq 2$ を, 実数 p は $0 < p < 1$ をみたすとする. 次の問いに答えよ.

(1) $k \cdot {}_n C_k = n \cdot {}_{n-1} C_{k-1}$ ($1 \leq k \leq n$) が成り立つことを示せ.

(2) 和 $\sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ.

(3) 和 $\sum_{k=0}^n k(k-1) {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ.

(解) (1) 二項係数の定義より

$$k \cdot {}_n C_k = k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot \{(n-1) - (k-1)\}!} = n \cdot {}_{n-1} C_{k-1}$$

となる. (2) 変数変換 $\ell = k - 1$ と二項定理より

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n n {}_{n-1} C_{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n p \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1} C_{\ell} p^{\ell} (1-p)^{(n-1)-\ell} \\ &= n p \{p + (1-p)\}^{n-1} = n p \end{aligned}$$

である. (3) 変数変換 $\ell = k - 2$ と二項定理より

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=2}^n n(n-1) {}_{n-2} C_{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) {}_{n-2} C_{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n {}_{n-2} C_{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} {}_{n-2} C_{\ell} p^{\ell} (1-p)^{(n-2)-\ell} \\ &= n(n-1) p^2 \{p + (1-p)\}^{n-2} = n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

である. ■