確率統計学概論　解答例

2014.12.01

■　$\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$ とするとき，次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$　　(2)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left\{{}_nC_k\left(\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\right\}$

(解) (1) 変数変換 $n = \lambda\,(x+1)$ と

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} &= \lim_{x\to+\infty}\left\{1-\frac{\lambda}{\lambda\,(x+1)}\right\}^{\lambda\,(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\lambda\,(x+1)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{-\lambda}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\lambda}\right] = e^{-\lambda}\cdot 1^{-\lambda} = e^{-\lambda}\end{aligned}$$

である．(2) (1) の極限を適用して，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{{}_nC_k\left(\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^n}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\right]\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{(k-1)\ \text{個}}\cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}\end{aligned}$$

となる．■