確率統計学概論　解答例

2014.11.26

■　ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$\Gamma(1)$ を求めよ．

(2)　すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\Gamma(1/2)$ を求めよ．

（解） (1) $[-e^{-t}]' = e^{-t}$ より

$$\Gamma(1) = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u e^{-t}\, dt = \lim_{u\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^u = \lim_{u\to+\infty} (1 - e^{-u}) = 1$$

である．(2) 任意の $t \geq 0$，$\ell \in \mathbb{N}$ に対して $e^t \geq t^\ell/\ell!$ が成り立つことに注意したい．任意の $z > 0$ に対して，z の整数部分を k とすると，$z < k+1$ より

$$0 \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{t^z}{e^t} \leq \lim_{t\to+\infty} \left\{(k+1)!\, t^{z-(k+1)}\right\} = 0$$

となるので，$\lim_{t\to+\infty} (t^z\, e^{-t}) = 0$ である．部分積分法により

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z\, e^{-t}\, dt = \left[t^z\,(-e^{-t})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} z\, t^{z-1}\,(-e^{-t})\, dt = z\,\Gamma(z)$$

が成り立つ．(3) 変数変換 $x = \sqrt{t}$ を用いると，

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} \cdot (2\,x)\, dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

となる．極座標（$x = r\,\cos\theta$，$y = r\,\sin\theta$）を用いると，

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2)^2 =& 4 \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\ =& 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = \pi\end{aligned}$$

であるから，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となる．■