

■ 事象 A, B, C が互いに独立であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 事象 A, B, C の独立性から得られる関係式を示せ。
- (2) 事象 $A \cap B, C$ は互いに独立であるかどうかを調べよ。
- (3) 事象 $A \cup B, C$ は互いに独立であるかどうかを調べよ。

(解) (1) 独立性の定義より

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C), \quad P(A \cap B) = P(A)P(B), \\ P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

が成り立つ。(2) (1) の関係式より

$$P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = (P(A)P(B))P(C) = P(A \cap B)P(C)$$

が成り立つので、事象 $A \cap B, C$ は互いに独立である。(3) 任意の事象 A, B に対して

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

であることに注意したい。

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

より

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ = (P(A) + P(B) - P(A)P(B))P(C) = P(A \cup B)P(C)$$

となり、事象 $A \cup B, C$ は互いに独立である。 ■