確率統計学概論　解答例

2014.10.20

■　$\mathcal{F}$ を標本空間 Ω の σ 集合体とするとき，任意の A，$B \in \mathcal{F}$ に対して $A \cup B$，$A \cap B$，$A \setminus B \in \mathcal{F}$ であることを示せ．

(解)　$\varnothing \in \mathcal{F}$ であるから，$A_1 = A$，$A_2 = B$，$A_k = \varnothing$　($k = 3$，4，$\cdots$) とおくと，

$$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \cdots \cup \varnothing \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

である．Ω を普遍集合と考え，ド・モルガンの法則を適用すると

$$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$$

となる．任意の A，$B \in \mathcal{F}$ に対して $A \cup B \in \mathcal{F}$ であるから，

$$A \in \mathcal{F} \land B \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{F} \land B^c \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

となり，$A \cap B \in \mathcal{F}$ である．$A \setminus B = A \cap B^c$ であることと，任意の A，$B \in \mathcal{F}$ に対して $A \cap B \in \mathcal{F}$ であることから，

$$A \in \mathcal{F} \land B \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{F} \land B^c \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$$

となり，$A \setminus B \in \mathcal{F}$ である．■