

■ ある試験を受けた受験者から無作為に選んだ 10 名の成績は

$$91, 43, 95, 100, 98, 41, 71, 61, 92, 55$$

であった。母集団分布は正規分布であることは分かっているが、その母平均 μ および母分散 σ^2 は未知であるとき、 μ と σ^2 に対する信頼係数 0.90 の信頼区間を求めよ。

(解) 単純な計算により、

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{10} (91 + 43 + 95 + 100 + 98 + 41 + 71 + 61 + 92 + 55) = \frac{747}{10} = 74.7, \\ 9U^2 &= (91^2 + 43^2 + 95^2 + 100^2 + 98^2 + 41^2 + 71^2 + 61^2 + 92^2 + 55^2) - 10 \cdot 74.7^2 = 4890.1\end{aligned}$$

であり、 $U = \sqrt{4890.1/9} = 23.3$ である。正規母集団からの大きさ n の無作為標本に対して

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} \sim t_{n-1}, \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

が成り立つことに注意すると、信頼係数 0.90 の μ および σ^2 の信頼区間はそれぞれ

$$-1.8331 \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} = \frac{\sqrt{10}(74.7 - \mu)}{23.3} \leq 1.8331, \quad 3.325 \leq \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} = \frac{4890.1}{\sigma^2} \leq 16.919$$

となる、つまり、

$$61.2 \leq \mu \leq 88.2, \quad 289.0 \leq \sigma^2 \leq 1470.7$$

である。 ■