確率統計学　解答例

2013.07.09

■　確率変数 X が標準正規分布 $N(0,1^2)$ に従うとき，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $E[X^n]$ を求めよ．

(解)　変数変換 $x=-t$ により

$$\begin{aligned}E[X^n]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x^n}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\&=\int_{+\infty}^{0}\frac{(-t)^n}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{(-t)^2}{2}}\,(-1)\,dt+\int_{0}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\{(-1)^n+1\}\int_{0}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\end{aligned}$$

となる．(a) n が奇数のときには，$(-1)^n=-1$ より $E[X^n]=0$ である．(b) n が偶数のときを考える．$(-1)^n=1$ より

$$\begin{aligned}E[X^n]=&\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{0}^{+\infty}x^n\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\=&\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\left\{\left[x^{n-1}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(n-1)\,x^{n-2}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\right\}\\=&\frac{2\,(n-1)}{\sqrt{2\,\pi}}\int_0^{+\infty}x^{n-2}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=(n-1)\,E[X^{n-2}]\end{aligned}$$

が得られるので，$E[X^0]=E[1]=1$ より

$$\begin{aligned}E[X^n]=&(n-1)\cdot E[X^{n-2}]=(n-1)\cdot(n-3)\cdot E[X^{n-4}]=(n-1)\cdot(n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot E[X^0]\\=&(n-1)\cdot(n-3)\cdots 3\cdot 1=n!!\end{aligned}$$

となる．ここで，$n!!$ は n の**二重階乗**[*1]である．■

[*1] 自然数 n に対して，n が奇数なら 1 から n までの奇数を掛け合わせたもの，n が偶数なら 2 から n までの偶数を掛け合わせたものである．