# 確率統計学　解答例

2013.07.02

■　実数 $\mu$，$\sigma$　($\sigma > 0$) に対して，$f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

により定義するとき，$\mu$ に関して $\log\{f(x_1)\,f(x_2)\cdots f(x_n)\}$ が最大値をとる $\mu$ の値を求めよ．

**(解)**　対数法則より

$$g(\mu) \equiv \log\{f(x_1)\,f(x_2)\cdots f(x_n)\} = \sum_{k=1}^{n} \log f(x_k) = -\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(x_k-\mu)^2}{2\,\sigma^2} + \log\left(\sqrt{2\,\pi}\,\sigma\right)\right\}$$

となる．$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ とおくと

$$g'(\mu) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)\,(x_k-\mu)}{2\,\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu) = \frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k - \mu\right) = \frac{n}{\sigma^2}\,(\bar{x}-\mu)$$

が得られるので，$\mu < \bar{x}$ のとき $g'(\mu) > 0$ より $g(\mu)$ は単調増加であり，$\mu > \bar{x}$ のとき $g'(\mu) < 0$ より $g(\mu)$ は単調減少である．したがって，$\mu = \bar{x}$ のとき $g(\mu)$ は最大値をとる．■