# 確率統計学　解答例

2013.05.28

■　数列 $\{ I_n \}$ は

$$I_1 = 1, \qquad I_2 = \frac{\pi}{4}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

をみたすとする．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

と表せることを示せ．

**(解)**　$I_1$ の表現は

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1)}{1\cdot\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot 1}{1\cdot\sqrt{\pi}} = 1$$

より妥当である．(1) $n \geq 3$ が奇数の場合には，$n = 2k+1$ （$k \in \mathbb{N}$）とおき，漸化式を用いると，

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 \\ =& \frac{k}{k+\frac{1}{2}}\cdot\frac{k-1}{k-\frac{1}{2}}\cdot\frac{k-2}{k-\frac{3}{2}}\cdots\frac{2}{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}{(2k+1)\,\Gamma(k+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})} \end{aligned}$$

となる．(2) $n \geq 2$ が偶数の場合には，$n = 2k$ （$k \in \mathbb{N}$）とおき，漸化式を用いると，

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot I_2 \\ =& \frac{k-\frac{1}{2}}{k}\cdot\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdots\frac{\frac{5}{2}}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{2k\,\Gamma(k)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})} \end{aligned}$$

となる．■