確率統計学　解答例

2013.04.30

■　X, Y をそれぞれ $V[X]>0$, $V[Y]>0$ をみたす確率変数とするとき,

$$V\left[\frac{X-E[X]}{\sigma[X]}\pm\frac{Y-E[Y]}{\sigma[Y]}\right]$$

を簡単にせよ.

(解)　期待値の線形性より

$$\begin{aligned}E\left[\frac{X-E[X]}{\sigma[X]}\pm\frac{Y-E[Y]}{\sigma[Y]}\right]&=\frac{E[X-E[X]]}{\sigma[X]}\pm\frac{E[Y-E[Y]]}{\sigma[Y]}\\&=\frac{E[X]-E[X]}{\sigma[X]}\pm\frac{E[Y]-E[Y]}{\sigma[Y]}=0\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&V\left[\frac{X-E[X]}{\sigma[X]}\pm\frac{Y-E[Y]}{\sigma[Y]}\right]=E\left[\left(\frac{X-E[X]}{\sigma[X]}\pm\frac{Y-E[Y]}{\sigma[Y]}\right)^2\right]\\&=E\left[\frac{(X-E[X])^2}{\sigma[X]^2}\right]\pm 2\,E\left[\frac{(X-E[X])\,(Y-E[Y])}{\sigma[X]\,\sigma[Y]}\right]+E\left[\frac{(Y-E[Y])^2}{\sigma[Y]^2}\right]\\&=\frac{E\left[(X-E[X])^2\right]}{\sigma[X]^2}\pm\frac{2\,E[(X-E[X])\,(Y-E[Y])]}{\sigma[X]\,\sigma[Y]}+\frac{E\left[(Y-E[Y])^2\right]}{\sigma[Y]^2}\\&=\frac{V[X]}{V[X]}\pm 2\,\frac{Cov[X,Y]}{\sigma[X]\,\sigma[Y]}+\frac{V[Y]}{V[Y]}=2\pm 2\,\rho[X,Y]\end{aligned}$$

が得られる. ■