# 確率統計学　解答例

2013.04.23

■　確率変数 $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ は期待値 $\mu$，分散 $\sigma^2$ である同一の確率分布に従い，互いに独立であるとする．確率変数 $\bar{X}$，$U^2$ を

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2$$

により定義するとき，次の問いに答えよ．

(1)　$E[\bar{X}] = \mu$ であることを示せ．

(2)　各 $k$ に対して $\sigma^2 = E[X_k^2] - \mu^2$ が成り立つことを示せ．

(3)　各 $k$ に対して $(X_k - \bar{X})^2$ を展開せよ．

(4)　$E[U^2] = \sigma^2$ であることを示せ．

**(解)**　(1) 期待値の線形性より

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\,E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \mu$$

である．(2) 分散の定義と $E[1] = 1$ より

$$\sigma^2 = E\left[(X_k - \mu)^2\right] = E\left[X_k^2 - 2\,\mu\,X_k + \mu^2\right] = E\left[X_k^2\right] - 2\,\mu\,E\left[X_k\right] + \mu^2\,E\left[1\right] = E\left[X_k^2\right] - \mu^2$$

となる．(3) 展開すると

$$\begin{aligned}(X_k - \bar{X})^2 =& X_k^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k\,X_i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i\,X_j \\ =& \frac{(n-2)\,X_k^2}{n} - \frac{2}{n}\sum_{i\neq k} X_k\,X_i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} X_i\,X_j\end{aligned}$$

となる．(4) 独立性より，$i \neq j$ のとき $E[X_i\,X_j] = E[X_i]\,E[X_j] = \mu^2$ が成り立つことに注意したい．(2) より

$$\begin{aligned}E\left[(X_k - \bar{X})^2\right] =& \frac{n-2}{n}\,E[X_k^2] - \frac{2}{n}\sum_{i\neq k} E[X_k\,X_i] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} E[X_i\,X_j] \\ =& \frac{n-2}{n}\,\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \frac{2}{n}\sum_{i\neq k}\mu^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\mu^2 \\ =& \frac{n-2}{n}\,\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \frac{2}{n}\,(n-1)\,\mu^2 + \frac{1}{n}\,\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + \frac{n-1}{n}\,\mu^2 = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2\end{aligned}$$

となるので，

$$E[U^2] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-1}{n}\,\sigma^2 = \sigma^2$$

が得られる．■