確率統計学　解答例

2013.04.16

■　a，b を実数，X，Y を期待値が存在する確率変数とするとき，次を示せ．

(1)　$E[a\,X+b\,Y]=a\,E_X[X]+b\,E_Y[Y]$ が成り立つ．

(2)　X と Y が互いに独立ならば $E[(X-E_X[X])\,(Y-E_Y[Y])]=0$ が成り立つ．

(解)　(1) 分布関数 $F(x,y)$ と確率密度関数 $f(x,y)$ は

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,ds\,dt$$

をみたすので，周辺分布関数 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ は

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)\,ds\,dt,\qquad F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)\,dt\,ds$$

と表され，周辺確率密度関数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ は

$$f_X(x)=F_X'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,s)\,ds,\qquad f_Y(y)=F_Y'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)\,dt$$

となる．これらを用いると，

$$\begin{aligned}
E[a\,X+b\,Y]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(a\,x+b\,y)\,f(x,y)\,dx\,dy\\
&=a\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)\,dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)\,dy\\
&=a\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx+b\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy=a\,E_X[X]+b\,E_Y[Y]
\end{aligned}$$

が得られる．(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E_Y[Y])\,f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy-E_Y[Y]\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy=E_Y[Y]-E_Y[Y]\cdot 1=0$$

より

$$\begin{aligned}
E[(X-E_X[X])\,(Y-E_Y[Y])]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E_X[X])\,(y-E_Y[Y])\,f(x,y)\,dx\,dy\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x-E_X[X])\,f_X(x)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E_Y[Y])\,f_Y(y)\,dy\right\}\right]\,dx=0
\end{aligned}$$

である．■