確率統計学概論　解答例

2014.02.13

■　赤色，黄色，青色のボールがたくさんあり，これらのボールを使い，ボールを n （$n \in \mathbb{N}$）個横一例に並べる．このとき，赤色のボールが隣り合わない並べ方は何通りあるか調べよ．

(解)　ボールを n （$n \in \mathbb{N}$）個横一例に並べるとき，赤色のボールが隣り合わない並べ方の場合の数を a_n とする．$n = 1$ のときには $a_1 = 3$ であり，$n = 2$ のときには，赤色赤色の並びでなければ良いので，$a_2 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$ である．(a) 左から 1 番目のボールが赤色のときには，左から 2 番目のボールは黄色または青色でなければならない．左から 3 番目から n 番目までの並べ方については，ボールが $(n-2)$ 個の場合の並べ方が使える．(b) 左から 1 番目のボールが黄色または青色のときには，左から 2 番目から n 番目までの並べ方については，ボールが $(n-1)$ 個の場合の並べ方が使える．したがって，

$$a_n = 1 \cdot 2 \cdot a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-1} = 2\,a_{n-2} + 2\,a_{n-1}, \qquad n = 3, 4, 5, \cdots$$

である．$p = 1 - \sqrt{3}$，$q = 1 + \sqrt{3}$ とおくと，

$$a_n - p\,a_{n-1} = q\,(a_{n-1} - p\,a_{n-2}), \qquad a_n - q\,a_{n-1} = p\,(a_{n-1} - q\,a_{n-2}), \qquad n = 3, 4, 5, \cdots$$

と表されるので，

$$a_n - p\,a_{n-1} = q^{n-2}\,(a_2 - p\,a_1), \qquad a_n - q\,a_{n-1} = p^{n-2}\,(a_2 - q\,a_1), \qquad n = 3, 4, 5, \cdots$$

が得られる．したがって，$n \geq 3$ のとき

$$a_n = \frac{q^{n-1}\,(a_2 - p\,a_1) - p^{n-1}\,(a_2 - q\,a_1)}{q - p} = \frac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^{n-1}\left(5 + 3\sqrt{3}\right) - \left(1 - \sqrt{3}\right)^{n-1}\left(5 - 3\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}}$$

である．$n = 1$ および $n = 2$ のときも上記の表現は妥当であるから，すべての自然数 n に対して一般項 a_n は上記で与えられる．■