確率統計学概論　解答例

2014.02.10

■　確率変数 X が $N(\mu, \sigma)$ （$\sigma > 0$）に従うとき，$E\left[e^{t\,X}\right]$ を求めよ．

（解） $E\left[e^{t\,X}\right]$ は

$$E\left[e^{t\,X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \right\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\,\sigma^2\,t\,x-(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\,dx$$

と表されることに注意したい．

$$\frac{2\,\sigma^2\,t\,x-(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} = -\frac{(x-\mu-\sigma^2\,t)^2}{2\,\sigma^2} + \frac{t\,(2\,\mu+\sigma^2\,t)}{2}$$

であるから，変数変換 $x = \mu + \sigma^2\,t + \sigma\,y$ により

$$\begin{aligned} E\left[e^{t\,X}\right] =& \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{t\,(2\,\mu+\sigma^2\,t)}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2\,t)^2}{2\,\sigma^2}}\,dx \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{t\,(2\,\mu+\sigma^2\,t)}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\,\sigma\,dy = \frac{e^{\frac{t\,(2\,\mu+\sigma^2\,t)}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = e^{\frac{t\,(2\,\mu+\sigma^2\,t)}{2}} \end{aligned}$$

となる．■