確率統計学概論　解答例

2014.02.03

■　確率変数 X が $B(n,p)$ に従うとき，期待値 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ．

（解） 第 7 回（2013.12.16）の小テストより

$$\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,p, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,(n-1)\,p^2$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,p, \\
E\left[X^2\right] &= \sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \{k\,(k-1)+k\}\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,(n-1)\,p^2 + n\,p, \\
V[X] &= E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 = n\,(n-1)\,p^2 + n\,p - n^2\,p^2 = n\,p\,(1-p)
\end{aligned}$$

となる．■