確率統計学概論　解答例

2014.01.27

■　実数 μ, σ （$\sigma > 0$）に対して，広義積分

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

を求めよ．ただし，必要があれば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi}$ を用いてもよい．

(解)　変数変換 $z = (x-\mu)/\sigma$ により

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma z + \mu}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, \sigma\, dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma z + \mu)^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, \sigma\, dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz
\end{aligned}$$

となる．$\left[e^{-\frac{z^2}{2}}\right]' = -z\, e^{-\frac{z^2}{2}}$ と部分積分法により

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \left[-e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dx = \left[z \cdot \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

となるので，

$$I_1 = \mu, \qquad I_2 = \sigma^2 + \mu^2$$

である．■