確率統計学概論　解答例

2014.01.20

■ I_n （$n \in \mathbb{N}$）を $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ により定めるとき，すべての自然数 n に対して

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{n\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\Gamma(z)$ はガンマ関数である．

（解） ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \quad (z > 0)$$

をみたすので，すべての自然数 n に対して，n を 2 で割った余りを ℓ とすると，

$$\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} = \frac{\dfrac{n-1}{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\dfrac{n-2}{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)} = \frac{(n-1)\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{(n-2)\,\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)} = \frac{(n-1)\,(n-3)\,\Gamma\left(\dfrac{n-3}{2}\right)}{(n-2)\,(n-4)\,\Gamma\left(\dfrac{n-4}{2}\right)} = \cdots$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-3)\cdots(\ell+5)\,(\ell+3)}{(n-2)\,(n-4)\cdots(n+4)\,(\ell+2)} \times \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} & (\ell = 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} & (\ell = 1) \end{cases}$$

であることに注意したい．

$$I_1 = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

であり，すべての自然数 n に対して，部分積分法により

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot \left[-\cos x\right]'\,dx = \left[\sin^{n+1} x \cdot (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^{n+1} x\right]' \cdot (-\cos x)\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\cos^2 x\,dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\left(1 - \sin^2 x\right)\,dx = (n+1)\,(I_n - I_{n+2}),$$

つまり，$I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,I_n$ が得られる．(i) $n = 2k$ （$k \in \mathbb{N}$）のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \right\} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{n\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

であり，(ii) $n = 2\,k - 1$ （$k \in \mathbb{N}$）のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \right\} \cdot 2 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{n\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

である．■