確率統計学概論　解答例

2013.12.16

■　$n \geq 2$，$0 < p < 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$　$(1 \leq k \leq n)$ が成り立つことを示せ．

(2)　和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, {}_nC_k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ．

(3)　和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\, {}_nC_k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ．

（解） (1) 二項係数の定義より

$$k \cdot {}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot \{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

となる．(2) 変数変換 $\ell = k-1$ と二項定理より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\, {}_nC_k\, p^k\, (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\, {}_{n-1}C_{k-1}\, p^k\, (1-p)^{n-k} = n\,p \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell\, p^\ell\, (1-p)^{(n-1)-\ell} \\ &= n\,p\, \{p + (1-p)\}^{n-1} = n\,p\end{aligned}$$

である．(3) 変数変換 $\ell = k-2$ と二項定理より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\, {}_nC_k\, p^k\, (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} n\,(k-1)\, {}_{n-1}C_{k-1}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\,(n-1)\, {}_{n-2}C_{k-2}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \\ &= n\,(n-1)\,p^2 \sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}C_{k-2}\, p^{k-2}\, (1-p)^{n-k} \\ &= n\,(n-1)\,p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} {}_{n-2}C_\ell\, p^\ell\, (1-p)^{(n-2)-\ell} \\ &= n\,(n-1)\,p^2\, \{p + (1-p)\}^{n-2} = n\,(n-1)\,p^2\end{aligned}$$

である．■