確率統計学概論　解答例

2013.12.09

■　μ, σ （$\sigma > 0$）を定数とするとき，関数

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

の増減，凹凸を調べて，グラフの概形を描け．また，極限 $\lim_{\sigma\to+0} f(x)$ を調べよ．

（解） すべての x に対して $f(x) > 0$ であることに注意したい．対数をとると

$$\log f(x) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} - \log\left(\sqrt{2\,\pi}\,\sigma\right)$$

となり，この両辺を x で微分すると

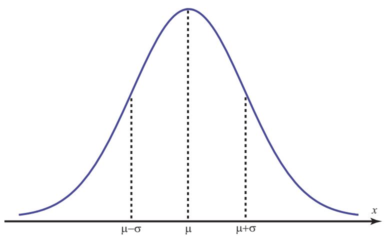
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}, \qquad \frac{f''(x)\,f(x) - \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

が得られる．

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\,f(x), \qquad f''(x) = \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)} - \frac{1}{\sigma^2}\,f(x) = \frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4}\,f(x)$$

より $f(x)$ の増減表とグラフの概形は上図のようになる．

x		$\mu-\sigma$		μ		$\mu+\sigma$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow 0$



　また，すべての $t > 0$ に対して $e^t > t$ であることに注意すると，$x \neq \mu$ のとき，はさみうちの原理と

$$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\cdot\frac{1}{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}} < \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\cdot\frac{1}{\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}\,(x-\mu)^2}$$

より $\lim_{\sigma\to+0} f(x) = 0$ であり，$f(\mu) = 1/(\sqrt{2\,\pi}\,\sigma)$ より $\lim_{\sigma\to+0} f(x) = +\infty$ である．■