確率統計学概論　解答例

2013.12.02

■　n を自然数とし，次の試行を 2 回行う．

積み木が積まれていない状態から始めて，サイコロを投げ，出た目が 1 以外の場合には積まれている積み木の上に 1 段積み木を積む，出た目が 1 の場合には積まれた積み木をすべて取り去るという操作を n 回繰り返す．

1 回目の試行終了後の積み木の段数を X，2 回目の試行終了後の積み木の段数を Y とするとき，和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\,P(X=k)$ および確率 $P(X \geq Y)$ を求めよ．

（解）　$p = 5/6$ とおくと，確率 $P(X=k)$ および $P(Y=k)$ は

$$P(X=k) = P(Y=k) = \begin{cases} (1-p)\,p^k & (0 \leq k < n) \\ p^n & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

であることに注意したい．$S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\,p^k$ とすると，変数変換 $\ell = k+1$ により

$$\begin{aligned}(1-p)\,S =& S - p\,S = \sum_{k=0}^{n-1} k\,p^k - \sum_{k=0}^{n-1} k\,p^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^k - \sum_{\ell=1}^{n} (\ell-1)\,p^{\ell} = \sum_{k=1}^{n-1} p^k - (n-1)\,p^n \\ =& \frac{p\,(1-p^{n-1})}{1-p} - (n-1)\,p^n = \frac{(n-1)\,p^{n+1} - n\,p^n + p}{1-p}\end{aligned}$$

が得られ，

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,P(X=k) = (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} k\,p^k + n\,p^n = \frac{(n-1)\,p^{n+1} - n\,p^n + p}{1-p} + n\,p^n = \frac{p\,(1-p^n)}{1-p}$$

となる．$k < n$ のとき

$$P(Y \leq k) = \sum_{\ell=0}^{k} P(Y=\ell) = (1-p)\sum_{\ell=0}^{k} p^{\ell} = (1-p)\cdot\frac{1-p^{k+1}}{1-p} = 1 - p^{k+1}$$

であり，$k = n$ のとき $P(Y \leq n) = 1$ であるから，

$$\begin{aligned}P(X \geq Y) =& \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y \leq k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{(1-p)\,p^k\right\}\cdot(1-p^{k+1}) + p^n \cdot 1 \\ =& (1-p)\cdot\frac{1-p^n}{1-p} - (1-p)\cdot\frac{p\,(1-p^{2\,n})}{1-p^2} + p^n = \frac{1+p^{2\,n+1}}{1+p}\end{aligned}$$

である．■