確率統計学概論　解答例

2013.11.18

■ 標本空間 Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が σ 集合体である，つまり，

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$ である，

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$ である，

(iii) $A_k \in \mathcal{F}$ （$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）ならば $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ である，

をみたすとき，次が成り立つことを示せ．

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$ である．

(2) $A,\ B \in \mathcal{F}$ ならば (a) $A \cup B \in \mathcal{F}$，(b) $A \cap B \in \mathcal{F}$，(c) $A \subset B \in \mathcal{F}$ であることを示せ．

（解） (1) 性質 (i)，(ii) より $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{F}$ である．(2) 性質 (iii) において $A_1 = A$，$A_2 = B$，$A_k = \varnothing$ （$k \geq 3$）とおくと，$X \cup \varnothing = X$ より

$$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

である．(ii) より $A^c \in \mathcal{F}$，$B^c \in \mathcal{F}$ であるから，$A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$ となり，(a) と (ii) を用いて $(A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$ が得られる．ド・モルガンの法則より

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

である．(b) と (ii) より $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ である．■