確率統計学概論　解答例

2013.11.06

■　サイコロを繰り返し投げ，次の規則に従って，動点 P は数直線上の整数点を右に移動していく．

(a)　最初の時点での動点 P は原点の上にある．

(b)　サイコロを投げて，1 の目が出たときには 2 つ進み，それ以外のときには 1 つ進む．

このとき，原点から数えて k 番目の点を動点 P が踏む確率を求めよ．

(解) 原点から数えて k 番目の点を動点 P が踏む確率を p_k，飛び越える確率を q_k とする．このとき，各 k に対して $p_k + q_k = 1$ であり，

$$q_0 = 0, \qquad q_{k+1} = \frac{1}{6} \cdot p_k = \frac{1-q_k}{6} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

をみたす．

$$q_{k+1} - \frac{1}{7} = \frac{1-q_k}{6} - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(q_k - \frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1} \cdot \left(q_0 - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1}$$

より

$$q_k = \frac{1}{7} \cdot \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right\}, \qquad k \geq 0$$

となる．したがって，求める確率は

$$p_k = 1 - q_k = \frac{1}{7} \cdot \left\{ 6 + \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right\}, \qquad k \geq 0$$

である．■