

■ 広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy$$

の値を求めよ.

(解) 極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

を用いると, $dx dy = r dr d\theta$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \theta}{2}} e^{-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]' dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

となる. ■