確率統計学概論　解答例

2012.12.05

■　μ，σ　($\sigma > 0$) を実定数とするとき，関数

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

の増減，凹凸を調べて，グラフの概形を描け．

(解)　すべての x に対して $f(x) > 0$ であることに注意したい．対数をとると

$$\log f(x) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} - \log\left(\sqrt{2\,\pi}\,\sigma\right)$$

となり，この両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}, \qquad \frac{f''(x)\,f(x) - \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

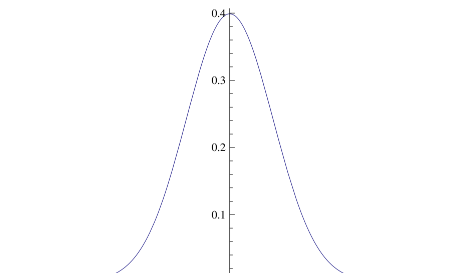
が得られる．

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\, f(x), \qquad f''(x) = \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)} - \frac{1}{\sigma^2}\, f(x) = \frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4}\, f(x)$$

より $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x		$\mu-\sigma$		μ		$\mu+\sigma$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow 0$

また，$x \to \pm\infty$ のとき $f(x) \to 0$ であるから，$f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる．■



標準正規分布（$\mu = 0$，$\sigma = 1$）