確率統計学概論　解答例

2012.11.28

■　λ を正定数とする．$n\,p = \lambda$ をみたすように p を定めるとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k} \right\}$$

を求めよ．

(解)　ネイピアの数の定義を用いると，

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left[\left\{ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} \right\}^{-\lambda} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \right] = e^{-\lambda}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left\{ {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k} \right\} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n\ (n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left\{ \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \right\} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}\end{aligned}$$

となる．■