確率統計学概論　解答例

2012.11.21

■　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

とするとき，$f(x)$ の導関数を調べよ．

(解)　$x \neq 0$ に対して $\delta(x) = 0$ をみたし，任意の連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$$

が成り立つ特殊な関数 $\delta(x)$ を**デルタ関数**という．$f(x) \equiv 1$ に対して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

が得られるので，デルタ関数 $\delta(x)$ の値は $x \neq 0$ では 0 であり，$x = 0$ では非常に大きい．

$x \neq 0$ では明らかに $f'(x) = 0$ である．連続的微分可能であり，無限遠方で 0 である任意の関数 $\phi(x)$ に対して

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\phi'(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{0} (-1)\cdot\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} 1\cdot\phi'(x)\,dx \\ &= [\phi(x)]_{-\infty}^{0} - [\phi(x)]_{0}^{+\infty} = 2\,\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\,\delta(x))\;\phi(x)\,dx \end{aligned}$$

が得られるので，$f'(x) = 2\,\delta(x)$ となる．■