

■ あるコインを投げたとき、表が出る確率が p ($0 < p < 1$)、裏が出る確率が $1 - p$ である。このコインを n 回投げたとき、表が出た回数を X とする。ここで、 n は自然数とする。

(1) 表が k 回出る確率 $P(X = k)$ を求めよ。

(2) 和 $\sum_{k=0}^n k P(X = k)$ を求めよ。

(解) (1) $P(X = k) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}$ である。(2) 変数変換 $\ell = k - 1$ と二項定理より

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k P(X = k) &= \sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot n!}{k! \cdot (n - k)!} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= n p \sum_{k=1}^n \frac{(n - 1)!}{(k - 1)! \cdot (n - k)!} p^{k-1} (1 - p)^{n-k} = n p \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n - 1)!}{\ell! \cdot \{(n - 1) - \ell\}!} p^{\ell} (1 - p)^{(n-1)-\ell} \\ &= n p \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1} C_{\ell} p^{\ell} (1 - p)^{(n-1)-\ell} = n p \{p + (1 - p)\}^{n-1} = n p \end{aligned}$$

である。 ■