確率統計学概論　解答例

2012.10.24

■ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ について，次が成り立つことを示せ．

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$ 　(A，$B \in \mathcal{F}$)

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 　(A，$B \in \mathcal{F}$)

(解) (1) $\Omega = \Omega \cup \varnothing$，$\Omega \cap \varnothing = \varnothing$ より $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$ となり，$P(\varnothing) = 0$ が得られる．
(2) 補集合に定義より $A \cup A^c = \Omega$，$A \cap A^c = \varnothing$ であるから，

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

より $P(A^c) = 1 - P(A)$ となる．(3) $C = A \cap B$，$D = B \cap A^c$ とおくと，

$$B = C \cup D, \qquad A \cup B = A \cup D, \qquad A \cap D = \varnothing, \qquad C \cap D = \varnothing$$

であるから，

$$P(B) = P(C) + P(D) = P(A \cap B) + P(D), \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(D)$$

より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(D) = P(A) + \{P(B) - P(A \cap B)\} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

である．■