確率統計学概論　解答例

2012.10.17

■　二項係数 ${}_nC_m$ について次の関係式が成り立つことを示せ.

(1)　$m\,{}_nC_m = n\,{}_{n-1}C_{m-1}$　（$1 \leq m \leq n$）

(2)　${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$　（$1 \leq m \leq n$）

(3)　${}_mC_m + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_nC_m = {}_{n+1}C_{m+1}$　（$0 \leq m \leq n$）

（解） 二項係数の定義より

$$\begin{aligned}
m\,{}_nC_m =& m \cdot \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = m \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{m \cdot (m-1)! \cdot \{(n-1)-(m-1)\}!} \\
=& n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,\{(n-1)-(m-1)\}!} = n\,{}_{n-1}C_{m-1}, \\
{}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1} =& \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} \\
=& \frac{(n-m)\,(n-1)!}{m!\,(n-m)!} + \frac{m\,(n-1)!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = {}_nC_m
\end{aligned}$$

となる．すべての n に対して ${}_nC_n = 1$ であることに注意して，(2) を帰納的に用いると

$$\begin{aligned}
{}_{n+1}C_{m+1} =& {}_nC_{m+1} + {}_nC_m = ({}_{n-1}C_{m+1} + {}_{n-1}C_m) + {}_nC_m \\
=& ({}_{n-2}C_{m+1} + {}_{n-2}C_m) + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m = \cdots \\
=& {}_{m+1}C_{m+1} + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_{n-2}C_m + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m \\
=& {}_mC_m + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_{n-2}C_m + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m
\end{aligned}$$

である．■