応用数学 I　解答例

2012.07.17

■　100 点満点のテストを行い，無作為に選んだ 10 名の成績は次のようであった．

$$91,\quad 43,\quad 95,\quad 100,\quad 98,\quad 41,\quad 71,\quad 61,\quad 92,\quad 55$$

母集団分布が正規分布であることを仮定して，次の問いに答えよ．

(1) 母分散が 10^2 であるとき，母平均に対する信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ．

(2) 母分散が未知であるとき，母平均に対する信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ．

(解)　不偏標本分散 U^2 は

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\,\bar{X}^2\right)$$

と表されることに注意したい．標本平均 $\bar{x}$，不偏標本分散 u^2 はそれぞれ

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{10}\,(91+43+95+100+98+41+71+61+92+55) = 74.7,\\ u^2 &= \frac{1}{10-1}\left(\sum_{k=1}^{10} x_k - 10\cdot\bar{x}^2\right) = \frac{1}{9}\cdot\left(60691.0 - 10\cdot 74.7^2\right) = 543.34\end{aligned}$$

となる．

(1)　確率変数

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1^2)$ に従うので，$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ より

$$68.5 = 74.7 - 1.96\cdot\sqrt{10} \leq \mu \leq 74.7 + 1.96\cdot\sqrt{10} = 80.9$$

となり，求める信頼区間は $[68.5, 80.9]$ である．

(2)　確率変数

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{U^2}{n}}}$$

は自由度 $(n-1)$ の t 分布に従うので，$n=10$ であるから $P(-2.26 \leq T \leq 2.26) = 0.95$ となり，

$$58.0 = 74.7 - 2.26\cdot\sqrt{\frac{543.34}{10}} \leq \mu \leq 74.7 + 2.26\cdot\sqrt{\frac{543.34}{10}} = 91.4$$

が得られる．したがって，求める信頼区間は $[58.0, 91.4]$ である．■