応用数学 I　解答例

2012.07.10

■　母平均 μ，母分散 σ^2 の正規母集団から抽出した大きさ n の無作為標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．このとき，$V\left[\bar{X}\right]$ および

$$I(\mu) = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\log f(X_1, \mu)\right]\right\}^2\right]$$

を求めよ．

（解）　分散の公式と，無作為標本であることより

$$V\left[\bar{X}\right] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V\left[X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる．また，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数は

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\log f(x_1, \mu)\right] = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} - \frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{x_1-\mu}{\sigma^2}$$

と部分積分法により

$$\begin{aligned}
I(\mu) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma^2}\right)^2 f(x_1,\mu)\, f(x_2,\mu)\cdots f(x_n,\mu)\, dx_1\, dx_2\cdots dx_n \\
&= \frac{1}{\sigma^4}\int_{\mathbb{R}}(x_1-\mu)^2 f(x_1,\mu)\, dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\int_{\mathbb{R}}\left[-(x_1-\mu)\right]\frac{\partial}{\partial x_1}\left[e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] dx_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx_1 = \frac{1}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

が得られる．■

注意　上の計算結果より

$$V\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}} = \frac{1}{n\, I(\mu)}$$

が成り立つので，$\bar{X}$ は有効推定量である．