応用数学 I　解答例

2012.06.26

■　微分可能な関数 $g_1(\theta)$，$g_2(\theta)$，$\cdots$，$g_n(\theta)$ に対して

$$[g_1(\theta)\, g_2(\theta) \cdots g_n(\theta)]' = [\log\{g_1(\theta)\, g_2(\theta) \cdots g_n(\theta)\}]'\; g_1(\theta)\, g_2(\theta) \cdots g_n(\theta)$$

が成り立つことを示せ．また，母数 θ をもつ母集団の確率密度関数を $f(x,\theta)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_n をこの母集団からの無作為標本とし，$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を母数 θ の任意の不偏推定量とする．

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) = \log\{f(x_1,\theta)\, f(x_2,\theta) \cdots f(x_n,\theta)\}$$

とおくとき

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E\left[\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right]$$

を簡単にせよ．

（解）　対数関数の微分により

$$[\log\{g_1(\theta)\, g_2(\theta) \cdots g_n(\theta)\}]' = \frac{[g_1(\theta)\, g_2(\theta) \cdots g_n(\theta)]'}{g_1(\theta)\, g_2(\theta) \cdots g_n(\theta)}$$

であるから，これにより前半が示せる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta} E\left[\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)\right] &= \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)\, f(x_1,\theta) \cdots f(x_n,\theta)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)\, \frac{\partial}{\partial\theta} \left[f(x_1,\theta) \cdots f(x_n,\theta)\right]\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)\, \frac{\partial}{\partial\theta} L(x_1, \cdots, x_n, \theta)\, f(x_1,\theta) \cdots f(x_n,\theta)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= E\left[\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)\, \frac{\partial}{\partial\theta} L(X_1, \cdots, X_n, \theta)\right]
\end{aligned}$$

となる．また，

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} L(X_1, \cdots, X_n, \theta)\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left[\log f(X_k, \theta)\right]\right] = 0$$

より

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E\left[\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)\right] = E\left[\left\{\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n) - \theta\right\} \frac{\partial}{\partial\theta} L(X_1, \cdots, X_n, \theta)\right]$$

が得られる．■