応用数学 I　解答例

2012.06.05

■　母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．このとき，

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2\right], \qquad E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\mu\right)^2\right]$$

を求めよ．

（解）　分散の定義より

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\mu\right)^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(X_k-\mu\right)^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V\left[X_k\right]=\frac{1}{n}\cdot\left(n\,\sigma^2\right)=\sigma^2$$

となる．また，各 k に対して $\sigma^2=V[X_k]=E[X_k^2]-\mu^2$ である．X_1，X_2，$\cdots$，X_n は無作為標本であるから，$k\neq\ell$ のとき $E[X_k\,X_\ell]=E[X_k]\,E[X_\ell]=\mu^2$ であり，

$$\begin{aligned}E\left[\bar{X}^2\right]=&\frac{1}{n^2}\,E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[X_k^2\right]+\sum_{k\neq\ell}E\left[X_k\,X_\ell\right]\right\}\\=&\frac{1}{n^2}\,\left\{n\,\left(\sigma^2+\mu^2\right)+n\,(n-1)\,\mu^2\right\}=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\end{aligned}$$

が得られる．

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}X_k^2-2\,\bar{X}\,\sum_{k=1}^{n}X_k+n\,\bar{X}^2=\sum_{k=1}^{n}X_k^2-n\,\bar{X}^2$$

より

$$\begin{aligned}E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2\right]=&\frac{1}{n}\,\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[X_k^2\right]-n\,E\left[\bar{X}^2\right]\right\}\\=&\frac{1}{n}\,\left\{n\,\left(\sigma^2+\mu^2\right)-n\,\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu\right)\right\}=\frac{n-1}{n}\,\sigma^2\end{aligned}$$

となる．■