応用数学 I　解答例

2012.05.29

■　すべての実数 $x > 0$ に対して $\log x \leq x - 1$ が成り立つことを示せ．

（解）　$f(x) = x - 1 - \log x$ とおくと，$f'(x) = 1 - 1/x = (x-1)/x$ であるから，$f(x)$ は $0 < x < 1$ のとき単調減少，$x > 1$ のとき単調増加である．したがって，$f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $f(1) = 0$ をとるので，すべての実数 $x > 0$ に対して $\log x \leq x - 1$ が成り立つ．■

■　正数 p_k，q_k　（$k = 1$，2，$\cdots$，n）が

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} q_k = 1$$

をみたすとき，

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \leq -\sum_{k=1}^{n} p_k \log q_k$$

が成り立つことを示せ．

（解）　不等式 $\log x \leq x - 1$ を用いて，

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k + \sum_{k=1}^{n} p_k \log q_k &= \sum_{k=1}^{n} p_k \log \frac{q_k}{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{q_k}{p_k} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (q_k - p_k) = \sum_{k=1}^{n} q_k - \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

となる．すべての k に対して $p_k = q_k$ が成り立つときのみ等号が成り立つ．■