応用数学 I　解答例

2012.05.22

■　任意の実数 a_k，b_k （$k=1$，2，$\cdots$，n）に対して

$$\sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|\,|\,b_k\,| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\,b_k\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つことを示せ．

（解）　ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ と表すと，任意の n 次元実ベクトル $\mathbf{a}=(a_k)$ に対して

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\,\mathbf{a}\,\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ge 0$$

が成り立つことに注意したい．n 次元ベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ の第 k 要素をそれぞれ $|\,a_k\,|$，$|\,b_k\,|$ により定めると，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\ge 0$ であり，示すべき不等式は $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_2\,\|\,\mathbf{y}\,\|_2$ である．

(1) $\|\,\mathbf{y}\,\|_2 = 0$ のときには，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$ であるから $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ となり，不等式 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_2\,\|\,\mathbf{y}\,\|_2$ が成り立つ．

(2) $\|\,\mathbf{y}\,\|_2 > 0$ のときを考える．任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$0 \le (\mathbf{x}+t\,\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+t\,\mathbf{y}) = \|\,\mathbf{x}\,\|_2^2 + 2\,t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + t^2\,\|\,\mathbf{y}\,\|_2^2$$

でなければならないので，

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 - \|\,\mathbf{x}\,\|_2^2\,\|\,\mathbf{y}\,\|_2^2 \le 0 \qquad \text{つまり} \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le \|\,\mathbf{x}\,\|_2\,\|\,\mathbf{y}\,\|_2$$

が得られる．■