応用数学 I　解答例

2012.05.01

■　独立な確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n が期待値 μ，分散 σ^2 である同一の確率分布に従うとき，

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2$$

の期待値を求めよ．

（解）　$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$ と $E[X_k] = \mu$ （$k = 1$，2，$\cdots$，n）より

$$E\left[S^2\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - E[X_k])^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V[X_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

である．■

■　独立な確率変数 X，Y それぞれについて期待値および分散が存在するとき，定数 a，b に対して

$$V[a\,X + b\,Y] = a^2\,V[X] + b^2\,V[Y]$$

が成り立つことを示せ．

（解）　確率変数 X と Y が独立であるから，$E[X\,Y] = E[X]\;E[Y]$ が成り立つ．期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])\;(Y - E[Y])] =& E[X\,Y - E[Y]\;X - E[X]\;Y + E[X]\;E[Y]] \\ =& E[X\,Y] - E[X]\;E[Y] = E[X]\;E[Y] - E[X]\;E[Y] = 0 \end{aligned}$$

が得られ，

$$\begin{aligned} V[a\,X + b\,Y] =& E\left[(a\,X + b\,Y - E[a\,X + b\,Y])^2\right] = E\left[\{a\;(X - E[X]) + b\;(Y - E[Y])\}^2\right] \\ =& E\left[a^2\;(X - E[X])^2 + 2\,a\,b\;(X - E[X])\;(Y - E[Y]) + b^2\;(Y - E[Y])^2\right] \\ =& a^2\,E\left[(X - E[X])^2\right] + 2\,a\,b\,E[(X - E[X])\;(Y - E[Y])] + b^2\,E\left[(Y - E[Y])^2\right] \\ =& a^2\,V[X] + b^2\,V[Y] \end{aligned}$$

となる．■