応用数学 I　解答例

2012.04.24

■　独立な確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n が期待値 μ，分散 σ^2 である同一の確率分布に従うとき，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2$$

の期待値を求めよ．

（解）　期待値の線形性より

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \mu$$

である．各 k に対して，$V[X_k] = E[X_k^2] - \{E[X_k]\}^2$ より $E[X_k]^2 = \sigma^2 + \mu^2$ である．また，独立性より，$k \neq \ell$ なら $E[X_k\, X_\ell] = E[X_k]\, E[X_\ell] = \mu^2$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\left(X_k - \bar{X}\right)^2 =& X_k^2 - 2\,X_k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 \\
=& X_k^2 - \frac{2}{n}\left(X_k^2 + \sum_{j\neq k} X_k\, X_j\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^2 + \sum_{\ell\neq j} X_j\, X_\ell\right)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X_k - \bar{X}\right)^2\right] =& E\left[X_k^2\right] - \frac{2}{n}\left(E\left[X_k^2\right] + \sum_{j\neq k} E\left[X_k\, X_j\right]\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left(E\left[X_j^2\right] + \sum_{\ell\neq j} E\left[X_j\, X_\ell\right]\right) \\
&= \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \frac{2}{n}\left\{\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + \sum_{j\neq k}\mu^2\right\} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + \sum_{\ell\neq j}\mu^2\right\} \\
&= \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \frac{2}{n}\left(\sigma^2 + n\,\mu^2\right) + \frac{1}{n^2}\,n\left(\sigma^2 + n\,\mu^2\right) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2
\end{aligned}$$

となるので，

$$E\left[U^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(X_k - \bar{X}\right)^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\,\sigma^2\right) = \sigma^2$$

が得られる．■