応用数学 I　解答例

2012.04.17

■　関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = 1 - \sin x + x\,\cos x, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^\pi f(t)\,dt$$

で定義するとき，$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で $g(x)$ が最大値および最小値をとる x の値を求めよ．

（解）　$g(x)$ は

$$g(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^\pi f(t)\,dt$$

であるから，$g'(x) = 2\,f(x)$，$g''(x) = -2\,x\,\sin x$ が得られる．$0 < x < \pi$ の範囲で，$g''(x) < 0$ より $g'(x)$ は狭義の単調減少関数である．$g'(\pi/2) = 0$ より $g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0		$\pi/2$		π
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，$g(x)$ は $x = \pi/2$ で最大値をとる．

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \left[x + 2\,\cos x + x\,\sin x\right]_0^\pi = \pi - 4$$

より，$g(0) = 4 - \pi > 0$，$g(\pi) = \pi - 4 < 0$ であるから，$g(x)$ は $x = \pi$ で最小値をとる．■