

統計学概論 解答例

2012.01.30

問題 $X \sim B\left(10^4, \frac{1}{2}\right)$ とする．標準正規分布で近似することにより，次の確率を求めよ．

(1) $P(4950 \leq X \leq 5050)$

(2) $P(|X - 4950| \geq 25)$

(解) $E[X] = 10^4 \cdot \frac{1}{2} = 5000$, $V[X] = 10^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2500 = 50^2$ であることに注意したい．ドモアブル・ラプラスの定理より， $Z = \frac{X - 5000}{50}$ を標準正規分布 $N(0, 1^2)$ で近似する．(1)

$$\begin{aligned} P(4950 \leq X \leq 5050) &= P(4949.5 \leq X \leq 5050.5) = P\left(\frac{4949.5 - 5000}{50} \leq Z \leq \frac{5050.5 - 5000}{50}\right) \\ &= P(-1.01 \leq Z \leq 1.01) = P(Z \leq 1.01) - P(Z \leq -1.01) \\ &= P(Z \leq 1.01) - (1 - P(Z \geq -1.01)) = P(Z \leq 1.01) - (1 - P(Z \leq 1.01)) \\ &= 2P(Z \leq 1.01) - 1 = 2 \cdot 0.8438 - 1 = 0.6876 \end{aligned}$$

である．(2) 事象 $Z \leq 4925$ と $Z \geq 4975$ は互いに排反であるから，

$$P(|X - 4950| \geq 25) = P(X \leq 4925 \vee X \geq 4975) = P(X \leq 4925) + P(X \geq 4975)$$

である．

$$\begin{aligned} P(X \leq 4925) &= P(X \leq 4925.5) = P\left(Z \leq \frac{4925.5 - 5000}{50}\right) = P(Z \leq -1.49) \\ &= 1 - P(Z \geq -1.49) = 1 - P(Z \leq 1.49) = 1 - 0.9319 = 0.0681, \\ P(X \geq 4975) &= P(X \geq 4974.5) = P\left(Z \geq \frac{4974.5 - 5000}{50}\right) = P(Z \geq -0.51) \\ &= P(Z \leq 0.51) = 0.6950 \end{aligned}$$

より， $P(|X - 4950| \geq 25) = 0.0681 + 0.6950 = 0.7631$ が得られる． ■