統計学概論　解答例

2012.01.16

問題　$n \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$ とするとき，次を計算せよ．

(1) $E\left[e^{t\,X}\right] = \sum_{k=0}^{n} e^{t\,k}\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$

(2) $E\left[e^{t\,X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x}\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\,dx$

（解） (1) 二項定理より

$$E\left[e^{t\,X}\right] = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\,\left(p\,e^t\right)^k\,(1-p)^{n-k} = \left\{p\,e^t + (1-p)\right\}^n = \left\{1 + p\,\left(e^t - 1\right)\right\}^n$$

である．(2) 指数関数の指数部分は

$$t\,x - \frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} = -\frac{x^2 - 2\,\left(t\,\sigma^2 + \mu\right)\,x + \mu^2}{2\,\sigma^2} = -\frac{\left\{x - \left(t\,\sigma^2 + \mu\right)\right\}^2}{2\,\sigma^2} + \frac{t^2\,\sigma^2 + 2\,t\,\mu}{2}$$

となるので，変数変換 $x = t\,\sigma^2 + \mu + \sigma\,y$ により

$$E\left[e^{t\,X}\right] = e^{\frac{t^2\,\sigma^2 + 2\,t\,\mu}{2}}\,\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = e^{\frac{t^2\,\sigma^2 + 2\,t\,\mu}{2}}$$

である．■