統計学概論　　解答例

2011.12.12

問題　$n \geq 2,\ 0 < p < 1$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\ (1-p)^{n-k}$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\ (k-1)\ {}_nC_k\,p^k\ (1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ．

（解） $n \geq k \geq 1$ のとき $k\,{}_nC_k = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$ が成り立つことに注意したい．変数変換 $k = \ell + 1,\ k = m + 2$ と二項定理より

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\ (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\ (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}C_{k-1}\,p^k\ (1-p)^{n-k} \\
&= n\,p \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell\,p^\ell\ (1-p)^{(n-1)-\ell} = n\,p\ \{p + (1-p)\}^{n-1} = n\,p,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\ (k-1)\ {}_nC_k\,p^k\ (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} k\ (k-1)\ {}_nC_k\,p^k\ (1-p)^{n-k} \\
&= n\ (n-1)\ p^2 \sum_{m=0}^{n-2} {}_{n-2}C_m\,p^m\ (1-p)^{(n-2)-m} \\
&= n\ (n-1)\ p^2\ \{p + (1-p)\}^{n-2} = n\ (n-1)\ p^2
\end{aligned}
$$

となる．　■