統計学概論　解答例

2011.11.28

問題　ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

により定義される．このとき，(1) $\Gamma(1) = 1$ であり，(2) すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ が成り立つ，特に (3) n が自然数のときには $\Gamma(n+1) = n!$ であることを示せ．

(解) (1) $[-e^{-t}]' = e^{-t}$ であるから，

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

である．(2) $z > 0$ のとき，$\ell = [z] + 1$ とおくと $\ell > z$ であり，すべての $t > 0$ に対して $e^t > \dfrac{t^\ell}{\ell!}$ が成り立つので，

$$0 \le \lim_{t \to +\infty} \left(t^z\, e^{-t}\right) \le \lim_{t \to +\infty} \frac{\ell!}{t^{\ell - z}} = 0, \qquad \text{つまり，} \quad \lim_{t \to +\infty} \left(t^z\, e^{-t}\right) = 0$$

が得られる．部分積分法と $z > 0$ より

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z\, e^{-t}\, dt = \left[t^z \cdot \left(-e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(z\, t^{z-1}\right) \cdot \left(-e^{-t}\right)\, dt \\ &= z \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = z\,\Gamma(z)\end{aligned}$$

となる．(3) (2) の関係式を帰納的に用いると，

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\ (n-1)\ \Gamma(n-1) = \cdots = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

である．■