統計学概論　解答例

2011.11.21

問題　$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ とするとき，関数

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

の増減，凹凸を調べ，そのグラフを描け．

（解） $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) = -\frac{x-\mu}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}, \\ f''(x) =& -\left\{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} + \frac{x-\mu}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\right\} \\ =& \frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \end{aligned}$$

が得られ，表 1 は関数 $y = f(x)$ の増減，凹凸を示しており，図 1 はそのグラフである．■

x	$-\infty$		$\mu-\sigma$		μ		$\mu+\sigma$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0

表 1

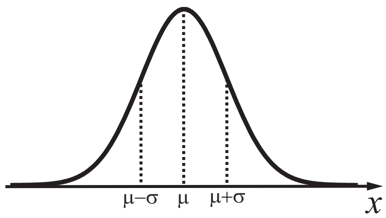

図 1