

統計学概論 解答例

2011.10.31

問題 サイコロ投げ，出た目の数が 1 および 2 なら +1，3 および 4 なら +2 進み，5 および 6 ならその場に留まるという試行を考える．場所 0 から出発して，この試行を n 回繰り返した後に，場所 $+2k$ ($0 \leq k \leq n$) に到達している確率を求めよ．

(解) n 回の試行で，1 および 2 の目が p 回，3 および 4 の目が q 回，5 および 6 の目が r 回であった場合の確率は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \left(\frac{1}{3}\right)^p \left(\frac{1}{3}\right)^q \left(\frac{1}{3}\right)^r = \frac{n!}{p!q!r!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

と表せる．

$$p + 2q = 2k, \quad p + r = n - q \quad \text{つまり} \quad p = 2k - 2q, \quad r = n - 2k + q$$

より

$$0 \leq 2k - 2q \leq n, \quad 0 \leq n - 2k + q \leq n \quad \implies \quad \max(0, 2k - n) \leq q \leq k$$

が成り立たなければならない．したがって，求める確率は

$$\sum_{q=\max(0, 2k-n)}^k \frac{n!}{(2k-2q)!q!(n-2k+q)!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

となる．■

参考 上記の和は，多項式 $(1 + x + x^2)^n$ の $2k$ 次の係数に関連している．