

統計学概論 解答例

2011.10.24

問題 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) に対して, 確率測度 P は次の性質をもつことを示せ.

- (i) $P(\emptyset) = 0$ である.
- (ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$ である.
- (iii) $A \subset B$ ならば $P(A) \leq P(B)$ である.
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ である.

(解) (i) $\Omega = \Omega \cup \emptyset, \Omega \cap \emptyset = \emptyset$ より

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

となるので, $P(\emptyset) = 0$ である. (ii) $\Omega = A \cup A^c, A \cap A^c = \emptyset$ より

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

となるので, $P(A^c) = 1 - P(A)$ である. (iii) $B = (B \setminus A) \cup A, (B \setminus A) \cap A = \emptyset$ より

$$P(B) = P((B \setminus A) \cup A) = P(B \setminus A) + P(A) \geq P(A)$$

である. (iv) $A \cup B = A \cup (B \setminus A), A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ より

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

である. また, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A), (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ より

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (B \setminus A)) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

である. したがって,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

となる. ■