応用数学 I　解答例

締切日：　**2011.07.14**
提出場所：　**数学院生演習室（教育学部２号館３階）**
レポートボックス

問題　確率変数 X，Y は正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従い，互いに独立であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(i) 確率変数 $Z=\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$ が従う確率分布について調べよ．

(ii) 確率変数 $W=\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2$ が従う確率分布について調べよ．

（解） 確率変数 Z と W の分布関数をそれぞれ $F_Z(z)$，$F_W(w)$ と表し，確率密度関数をそれぞれ $f_Z(z)$，$f_W(w)$ と表す．

(i) $z<0$ のときには，$Z\geq 0$ であるから $F_Z(z)=P\,(Z\leq z)=0$ であり，$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$ である．$z>0$ のときには,

$$F_Z(z)=P\,(Z\leq z)=P\left(\mu-\sigma\sqrt{z}\leq X\leq \mu+\sigma\sqrt{z}\right)=\int_{\mu-\sigma\sqrt{z}}^{\mu+\sigma\sqrt{z}}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\,dx$$

と表せる．変数変換 $x=\mu+\sigma\,t$ により

$$F_Z(z)=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=2\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

となるので，$\frac{d}{dz}\,[\sqrt{z}]=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ より

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{(\sqrt{z})^2}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,z^{\frac{1}{2}-1}\,e^{-\frac{z}{2}}$$

である．したがって，Z は自由度 1 の χ^2 分布に従う．

(ii) $w<0$ のときには，$W\geq 0$ であるから $P\,(W\leq w)=0$ である．$w>0$ のときには,

$$D=\left\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ (x-\mu)^2+(y-\mu)^2\leq\sigma^2\,w\right\}$$

とおくと

$$F_W(w)=P\,(W\leq w)=P\,(D)=\iint_D\left\{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\right\}dx\,dy$$

と表せる．変数変換 $x=\mu+\sigma\,r\,\cos\theta$，$y=\mu+\sigma\,r\,\sin\theta$ を用いると，$dx\,dy=\sigma^2\,r\,dr\,d\theta$ より

$$\begin{aligned}F_W(w)&=\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\sqrt{w}}\frac{1}{2\,\pi\,\sigma^2}\,e^{-\frac{r^2\,\cos^2\theta}{2}}\,e^{-\frac{r^2\,\sin^2\theta}{2}}\,\sigma^2\,r\,dr\,d\theta\\&=\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\sqrt{w}}\frac{1}{2\,\pi}\,e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\sqrt{w}}e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\end{aligned}$$

となる．$\Gamma(1) = 1$ より

$$f_W(w) = F'_W(w) = \left(e^{-\frac{(\sqrt{w})^2}{2}} \sqrt{w} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{w}} \right) = \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\, w^{\frac{2}{2}-1}\, e^{-\frac{w}{2}}$$

が得られる．したがって，W は自由度 2 の χ^2 分布に従う． ■