応用数学 I　解答例

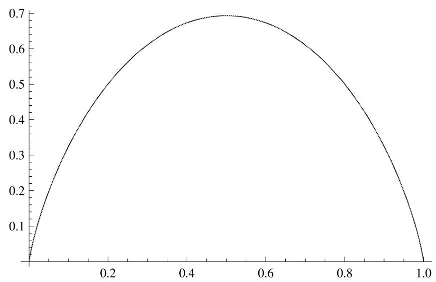
2011.06.28

問題　関数 $f(x) = -x\,\log x - (1-x)\,\log(1-x)$ のグラフを描け．また，極限 $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx$ を調べよ．

（解） $f'(x) = \log\dfrac{1-x}{x}$ より，$0 < x < 1/2$ の範囲では，$f'(x) > 0$ だから $f(x)$ は単調増加であり，$1/2 < x < 1$ の範囲では，$f'(x) < 0$ だから $f(x)$ は単調減少である．また，ロピタルの定理と

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{[\log\varepsilon]'}{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]'} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\dfrac{1}{\varepsilon}}{-\dfrac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon) = 0$$

により $\lim_{\varepsilon\to+0}(\varepsilon\,\log\varepsilon) = 0$ であるから，$\lim_{x\to+0} f(x) = 0$，$\lim_{x\to1-0} f(x) = 0$ である．したがって，$f(x)$ のグラフは下図のようになる．



変数変換 $y = 1 - x$ により

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(1-x)\,\log(1-x)\,dx = \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}(y\,\log y)\,(-1)\,dy = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} y\,\log y\,dy$$

となるので，

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx = -2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x\,\log x\,dx$$

が成り立つ．部分積分法により

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x\,\log x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\,\log x\right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\,\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \\ &= \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\,\log(1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\,(\varepsilon\,\log\varepsilon) - \frac{(1-\varepsilon)^2-\varepsilon^2}{4}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx &= -2\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x\,\log x\,dx \\ &= -2\cdot\left(\frac{1^2}{2}\cdot\log 1 - \frac{0}{2}\cdot 0 - \frac{1^2-0^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である．■