応用数学 I　解答例

2011.06.14

問題　λ は実数，n は $n \geq 3$ をみたす自然数とする．

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

に対して A^n および B^n を求めよ．

(解) 行列 P，Q を

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると，$A = \lambda E_2 + P$，$B = \lambda E_3 + Q$ であり，$P^2 = O$，$Q^3 = O$ および交換法則

$$P\,E_2 = P = E_2\,P, \qquad Q\,E_3 = Q = E_3\,Q$$

が成り立つことが分かる．ここで，E_k は $k \times k$ の単位行列である．$P^0 = E_2$，$Q^0 = E_3$ と考え，二項定理を適用すると，

$$\begin{aligned}
A^n &= (\lambda E_2 + P)^n = \sum_{\ell=0}^{n} {}_nC_k\,(\lambda E_2)^{n-k}\,P^k = \sum_{\ell=0}^{n} {}_nC_\ell\,\lambda^{n-\ell}\,P^\ell \\
&= {}_nC_0\,\lambda^n\,E_2 + {}_nC_1\,\lambda^{n-1}\,P = \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\,\lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}, \\
B^n &= (\lambda E_3 + Q)^n = \sum_{\ell=0}^{n} {}_nC_\ell\,\lambda^{n-\ell}\,Q^\ell = {}_nC_0\,\lambda^n\,E_2 + {}_nC_1\,\lambda^{n-1}\,Q + {}_nC_2\,\lambda^{n-2}\,Q^2 \\
&= \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\,\lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} & \dfrac{n\,(n-1)}{2}\,\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得られる．■