応用数学 I　解答例

2011.06.07

問題　n 両編成の列車を，赤，青，黄色の 3 色を使って，次の条件をみたす塗り方の場合の数を求めよ．

(i) 各車両は 1 色で塗る；

(ii) すべての隣り合う 2 両において，両方またはどちらか一方が赤に塗られている．

（解） n 両編成の列車の塗り方の場合の数を a_n とする．

(a) $n = 2$ のとき：　1 両目が赤のときには，2 両目はどの色でも良いので，3 通りである．1 両目が赤でないときには，2 両目は赤でなければならないので，$2 \times 1 = 2$ 通りである．したがって，$a_2 = 3 + 2 = 5$ である．

(b) $n = 3$ のとき：　1 両目が赤のときには，2 両目以降は 2 両編成の塗り方が使えるので，$a_2 = 5$ 通りである．1 両目が赤でないときには，2 両目は赤で，3 両目はどの色でも良いので，$2 \times 1 \times 3 = 6$ 通りである．したがって，$a_3 = 5 + 6 = 11$ である．

(c) $n \geq 4$ のとき：　1 両目が赤のときには，2 両目以降は $(n-1)$ 両編成の塗り方が使えるので，a_{n-1} 通りである．1 両目が赤でないときには，2 両目は赤で，3 両目以降は $(n-2)$ 両編成の塗り方が使えるので，$2\,a_{n-2}$ 通りである．したがって，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2}$ が得られる．

$$
\begin{aligned}
a_n + a_{n-1} &= 2\,(a_{n-1} + a_{n-2}) = 2^2\,(a_{n-2} + a_{n-3}) \\
&= \cdots = 2^{n-3}\,(a_3 + a_2) = 2^{n-3}\,(11 + 5) = 2^{n+1}, \\
a_n - 2\,a_{n-1} &= (-1)\,(a_{n-1} - 2\,a_{n-2}) = (-1)^2\,(a_{n-2} - 2\,a_{n-3}) \\
&= \cdots = (-1)^{n-3}\,(a_3 - 2\,a_2) = (-1)^{n-3}\,(11 - 2 \cdot 5) = (-1)^{n-3}
\end{aligned}
$$

より

$$
a_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n-3}}{3} = \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3}
$$

である．■