# 応用数学 I　解答例

2011.05.31

**問題**　不等式

$$a\,b \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

および

$$T = 3\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k\,x_{k+1} > 0, \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\,0\,\}$$

が成り立つことを示せ.

**(解)** 相加平均・相乗平均の関係については

$$\frac{a^2+b^2}{2} - a\,b = \frac{(a+b)^2}{2} \geq 0$$

より成り立つことがわかる．任意の $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\,0\,\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$$

であることに注意すると，相加平均・相乗平均の関係より

$$T = 3\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k\,x_{k+1} \geq 3\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(x_k^2 + x_{k+1}^2\right) = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$$

となる.　■